Travaux dirigés- Série 3: Eléctricité II

November 20, 2014

Abstract

Université Mohammed V — **Année Universitaire 2014-2015**
Faculté des Sciences — **SMP: S3**

Electricité II
Travaux Dirigés: Série 3

Exercice I: *Lois d'induction*

Un circuit est composé d'une résistance R, de deux rails conducteurs, d'un interupteur K et d'un barreau conducteur de longueur l, de masse M et libre de se mouvoir sur les deux rails. Le circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ et perpendiculaire à son plan xOy. On communique au barreau une vitesse initiale $\vec{v} = v\ \vec{e}_x$.

A- Circuit ouvert

1) Faire un schéma illustratif et expliquer le phénomène produit,

2) Déterminer le champ électromoteur $\vec{E}_m$ qui apparait dans le barreau.

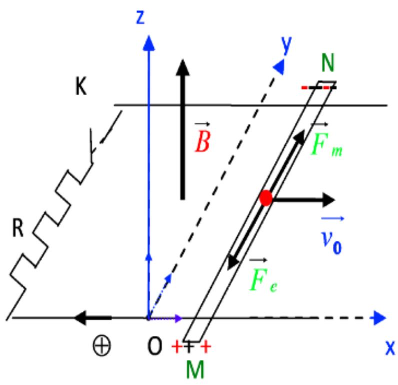
3.a) Calculer le champ électrique dans le barreau,

3.b) En déduire la ddp qui apparaît entres les bornes du barreau

4) Déterminer la force électromotrice e_{ind} induite:

a) La méthode de la circulation de $\vec{E}_m$,

b) La variation du flux



B- Circuit fermé

1) Déterminer la f.e.m $e(t)$,

2) Déterminer le courant i_{ind} traversant le circuit,

3) Montrer que le sens de i_{ind} est conforme avec la loi de Lenz,

4.a) Déterminer la force de Laplace $\vec{F}$ qui s'exerce sur le barreau,

4.b) Préciser l'action de $\vec{F}$,

5.a) Déterminer $\vec{v}(t)$ en fonction du temps de réponse du circuit $\tau = \frac{mR}{a^2B^2}$,

5.b) En déduire le courant i_{ind} traversant le circuit, commenter

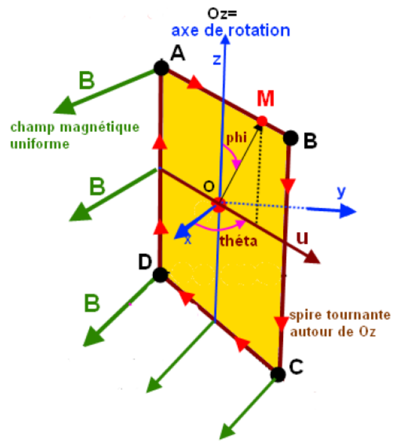
6) Déterminer le travail dW reçu par le barreau entre les instants t et $t + dt$ par:

a) La méthode de circulation de la force de Laplace

b) Le théorème de Maxwell.

Exercice II: *spire tournante dans un champ B uniforme*

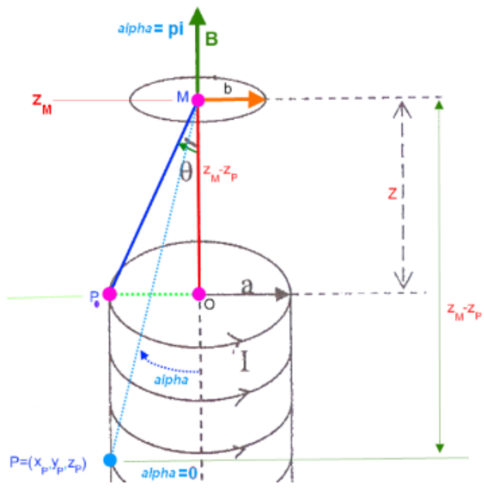
On considère une spire carrée $S = [ABCD]$ dans le plan $(\vec{u}, \vec{e}_z)$ d'un repère $R_s = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z)$ mobile par rapport à un repère fixe $R_0 = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où règne un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$.
La spire tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_0} = \omega\vec{e}_z$ autour de $\overrightarrow{Oz}$ milieu des deux cotés opposés AB et CD.
Sa position à l'instant t est donnée par l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \vec{e}_\rho) = \theta = \omega t$.



1) Faire un schéma, et montrer que le flux de $\vec{B}$ dépend du temps, commenter,
2.a) Parametrer les points M du cadre en fonction de θ,
2.b) Donner les composantes de $\vec{v}\,(M/R_0)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) et ω,
3) Quelle grandeur est à l'origine du mouvement des charges libres,
4) Donner son expression en fonction de w, B et les coordonnées de M,
5) En déduire la f.e.m instantanée induite dans la spire,
6) Retrouver l'expression de la f.e.m par la loi de Faraday.

Exercice III: *interaction bobine-solénoide*

Un long solénoide vertical $\mathbb{S}$ d'axe $\overrightarrow{Oz}$, semi infini ($z \leq 0$) à section circulaire, de rayon a et ayant n spires jointives par unité de longueur, est parcouru par un courant I permanent. Une bobine $\mathbb{B}$ circulaire de même axe que le solénoide, constituée de N spires de rayon b ($b << a$), de résistance R, d'inductance négligeable et de masse m, se déplace au dessus du solénoide le long de l'axe $\overrightarrow{Oz}$ à une vitesse $\vec{v} = -v\vec{e}_z$ où v est supposé constant et positif. La position du centre $M\,(0, 0, z_M)$ de la base inferieure de $\mathbb{B}$ est repérée par l'angle θ; c'est à dire $\tan\theta = \frac{a}{z}$.



1) Faire un schéma d'illustration,
2) Donner $\vec{B}$ créé par $\mathbb{S}$ en un point de son axe,
3) Déterminer le flux de $\vec{B}$ à travers:
a) une spire de la bobine; et **b**) toute la bobine.
On considère que $\vec{B}$ constant au voisinage de l'axe $\overrightarrow{Oz}$.
4) Calculer l'inductance mutuelle entre les *2* circuits,
5) En déduire que M peut se mettre sous la forme $M_0\,(1 - \cos\theta)$,
6.a) Déterminer la f.e.m induite en fonction de M_0, I, a, v et z.
6.b) Déduire le courant induit dans la bobine,
7) A l'aide du théorème de Maxwell, déterminer la résultante des forces magnétiques $\vec{F}$ qui s'exerce sur la bobine,
8) Quelle est la puissance $\mathcal{P}$, dissipée par effet joules dans $\mathbb{B}$, en fonction de F et v.

Exercice IV: *énergie magnétique*

On considère un câble coaxial infini cylindrique de rayons a, b, c. Le courant d'intensité totale I passe dans un sens dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.
1) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M,
2) Déterminer l'énergie magnétique W_m emmagasinée dans une unité de longueur d'une ligne coaxiale parcourue par un courant I.

1 Solution de la série 3

Exercice I: *circuit électrique dans* $\vec{B}$

A) <u>*Circuit ouvert*[1]</u>

1.a) *Schéma d'illustration*, voir fig 1 **1.b**) *Le phénomène produit*,

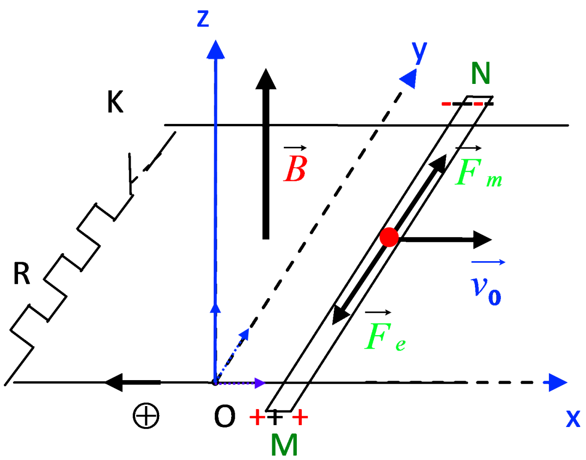


Figure 1: *circuit résistif dans un champ magnétique* $\vec{B}$: $y_N - y_M = L$

Lorsqu'on communique au barreau $[MN]$, la vitesse

$$\vec{v}_0 = v_0\ \vec{e}_x = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x$$

Les électrons de conduction (des électrons libres) sont entraînés suivant $\vec{e}_x$ avec la même vitesse. En présence du champ $\vec{B} = B\vec{e}_z$, les électrons sont alors soumis à la force magnétique

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= -e\ \vec{v}_0 \wedge \vec{B} \qquad \equiv \quad -e\ \vec{E}_m \\ &= -ev_0\ \vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z \\ &= +ev_0 B\ \vec{e}_y \end{aligned}$$

qui les entraîne vers la borne N.

Il en résulte alors:

i) : une *accumulation* d'électrons sur la borne N

ii) : un *appauvrissement* d'électrons libres en M

et par conséquent il y'a apparition d'une ddp

$$V_M - V_N \neq 0$$

d'où la naissance d'un champ électrostatique

$$\vec{E}_s = E_s\vec{e}_y$$

dirigé de M vers N (potentiel décroissant).
Ce champ E_s exerce à son tour une force électrique $\vec{F}_e$ sur les électrons libres

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}_s = -eE_s\vec{e}_y$$

Le déplacement des électrons libres s'arrêtera lorsque la force électrique $\vec{F}_e$ compense la force magnétique $\vec{F}_m$, soit

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = \vec{0}$$

2) *Le champ électromoteur $\vec{E}_m$ qui apparait dans le barreau*
Ce champ $\vec{E}_m$ est induit par $\vec{B}$; il est donné par

$$\vec{E}_m = \vec{v}_0 \wedge \vec{B} \quad = v_0\ \vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z \quad = -v_0 B\vec{e}_y$$

A l'équilibre on a :

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e \quad = -e\left(\vec{E}_m + \vec{E}_s\right) \quad = \vec{0}$$

$$\vec{E}_s = -\vec{E}_m \quad = \quad v_0 B\vec{e}_y$$

3.a) *Le champ électro-statique dans le barreau,*
3.b) *La ddp entre les bornes M et N du barreau*
Le champ $\vec{E}_s$ dérive d'un potentiel scalaire V;

$$\begin{array}{llcl} \text{a)} & : \ \vec{E}_s & = & -\overrightarrow{\text{grad}}V \\ \text{b)} & : \ dV & = & \overrightarrow{\text{grad}}V \times \overrightarrow{dl} = \frac{\partial V}{\partial y}dy \end{array}$$

$$dV = -E_s dy = -v_0 B dy \qquad \Rightarrow \qquad \int_N^M dV = V_M - V_N$$

$$\begin{aligned} V_M - V_N &= -v_0 B \int_N^M dy \\ &= -v_0 B\left(y_M - y_N\right) \\ &= v_0 B\left(y_N - y_M\right) \\ &= v_0 B\left(L - 0\right) \end{aligned}$$

$$V_M - V_N \quad = \quad +v_0 BL$$

4) *La force électromotrice e_{ind} induite*
4.a) *Par la méthode de la circulation du champ éléctromoteur $\vec{E}_m$*

La f.e.m induite est

$$\begin{aligned}
e_{ind} &= \oint_C \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} \\
&= \left(\int_M^K + \int_K^N\right) \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_N^M \vec{E}_m.\overrightarrow{dl}}_{\text{fem } (e_{ind})_{MN}} \\
e_{ind} &= \int_N^M \vec{E}_m.\overrightarrow{dl} \qquad , \quad \vec{E}_m = -v_0 B \vec{e}_y \\
&= -v_0 B \int_N^M \vec{e}_y.\overrightarrow{dl} \qquad , \quad \overrightarrow{dl} = dy\vec{e}_y \\
&= -v_0 B\,(y_M - y_N) \\
&= v_0 BL
\end{aligned}$$

<u>**4.b**</u>**)** *Par la méthode de variation du flux de $\vec{B}$*
Dans ce cas, le module e_{ind} est donné par

$$e_{ind} = -\frac{d\Phi_s}{dt}$$

on a:

$$\begin{aligned}
d\Phi_s &= \vec{B}.\overrightarrow{dS} &&= B\ \vec{e}_z.\overrightarrow{dS} \\
\overrightarrow{dS} &= L\vec{e}_y \wedge dx\vec{e}_x &&= L\vec{e}_y \wedge dt\,(v_0\vec{e}_x) \\
&= -\vec{e}_z L v_0 dt: && \text{orientation de S comme dans fig}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\Phi &= -BLv_0 dt \\
e_{ind} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\
& \quad v_0 BL
\end{aligned}$$

<u>**5**</u>**)** *La vitesse du barreau (facultatif)*
Cette vitesse est détérminée en résolvant la loi fondamentale de la dynamique

$$\sum_{forces} \vec{F} = m\ \vec{a} = m\frac{d\ \vec{v}}{dt}$$

Il y'a 3 types de forces qui s'exercant sur le barreau:
i) la force de Laplace

$$\vec{F}_L = i_{ind}\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

mais puisque le circuit est ouvert

$$i_{ind} = 0$$

cette force est nulle

$$\vec{F}_L = \vec{0}$$

ii) Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et *la réaction* $\vec{R}$
mais en absence de frottement on a aussi

$$m\,\vec{g} + \vec{R} \quad = \quad \vec{0}$$

Donc

$$\textstyle\sum_{forces} \vec{F} = \vec{0} \quad = \quad m\frac{d\,\vec{v}}{dt}$$
$$\vec{0} = m\frac{dv}{dt}\vec{e}_x$$

La vitesse de déplacement du barreau est donc *constante* $\vec{v} = \vec{v}_0$; le mouvement est alors rectiligne et uniforme.

B- <u>Circuit fermé</u>

<u>1</u>) La f.e.m $e\,(t)$: elle est donnée par la variation du flux coupé à travers le circuit

$$e_{ind} \quad = \quad -\tfrac{d\Phi_c}{dt}$$

avec

$$d\Phi_c \quad = \quad \vec{B}.d\,\vec{S} \quad , \quad \vec{B} = B\ \vec{e}_z$$

et, en choisissons un sens de circulation positif sur le circuit tel qu'il est indiqué sur la figure,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dS} &= -dx\vec{e}_x \wedge L\vec{e}_y \\ &= -v\,(t)\,dt\vec{e}_x \wedge L\vec{e}_y \\ &= -Lv\,(t)\,dt\ \vec{e}_z\end{aligned}$$

soit

$$d\Phi_c \quad = \quad -LBv\,(t)\,dt \tag{1.1}$$

<u>Résultat</u>

$$e_{ind} = -\tfrac{d\Phi_c}{dt} \quad = \quad B\ Lv\,(t)$$

<u>2</u>) *Le courant* i_{ind} *traversant le circuit:* Il est donné par

$$\begin{aligned} i_{ind} &= \tfrac{e_{ind}}{R} \qquad , \quad \text{sens: MKNM} \\ i_{ind} &= \tfrac{B\ Lv(t)}{R} > 0 \end{aligned}$$

Il a donc le même sens que le sens positif choisi.

<u>3</u>) *Le sens de* i_{ind} *est conforme avec la loi de Lenz*

Le courant induit i_{ind} va créer un champ d'induction $\vec{b}$ dans le sens contraire à $\vec{B}$ pour s'opposer à l'augmentation de son flux qui lui a donné naissance; en accord avec la loi de Lenz

$$\begin{aligned} \vec{b} &\sim I\,\overrightarrow{dl} \wedge \tfrac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3} \\ \vec{b} &\sim -i_{ind}dx\ \vec{e}_x \wedge \tfrac{\vec{e}_y}{|PM|^2} \quad , \quad \vec{e}_y = \tfrac{\overrightarrow{PM}}{PM} \\ &\sim -i_{ind}ldx\ \vec{e}_z \qquad , \quad \text{sens opposé à } \vec{B} \end{aligned}$$

4.a) *La force de Laplace $\vec{F}$ qui s'exerce sur le barreau*

Elle est donnée par la résultante des $d\vec{F}_L$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \oint_C d\vec{F}_L = \left(\int_M^K + \int_K^N + \int_N^M\right) I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} \\ &= \int_M^K + \int_K^N + \underbrace{\int_N^M I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}}_{\vec{F}_L\big|_{\text{barreau MN}}}\end{aligned}$$

$$d\vec{F}_L = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{F}_L\Big|_{barreau} &= \int_N^M I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} \qquad , \quad \vec{B} = B\ \vec{e}_z \\ &= \int_{y_N}^{y_M} I\overrightarrow{dl} \wedge B\ \vec{e}_z \\ &= \int_L^0 i_{ind} dy \vec{e}_y \wedge B\ \vec{e}_z \quad , \\ &= i_{ind} B\ \int_L^0 dy \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \\ &= \vec{e}_x i_{ind} B\ \int_L^0 dy \\ &= -i_{ind} B L \vec{e}_x\end{aligned}$$

comme

$$i_{ind} = \frac{B\ Lv(t)}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_L = -\frac{B^2\ L^2 v(t)}{R}\vec{e}_x$$

4.b) *Action de $\vec{F}$*

Elle s'oppose au mouvement du barreau (Loi de Lenz).

5.a) $\vec{v}\,(t)$ *en fonction du temps de réponse du circuit* $\tau = \frac{mR}{L^2 B^2}$

On part de la Loi fondamentale de la dynamique

$$\vec{F}_L = m\frac{d\,\vec{v}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{B^2\ L^2 v(t)}{R}\vec{e}_x = m\frac{d\,v}{dt}\ \vec{e}_x$$

$$\begin{aligned}m\frac{d\,v}{dt} &= -\frac{B^2\ L^2 v(t)}{R} \\ \frac{d\,v}{v(t)} &= -\frac{B^2\ L^2}{mR}dt \equiv -\frac{dt}{\tau}\end{aligned}$$

avec

$$\tau = \frac{mR}{B^2\ L^2}, \text{ temps de réponse du circuit}$$

Par integration

$$v\,(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

5.b) Expression de i_{ind},

$$\begin{aligned}i_{ind} &= \frac{B\ Lv(t)}{R} \\ &= \frac{B\ Lv_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= i_{ind0}e^{-\frac{t}{\tau}}\end{aligned}$$

avec

$$i_{ind0} = \frac{B\ Lv_0}{R}$$

<u>6</u>) *Travail dW* <u>**reçu**</u> *par le barreau entre les instant t et t + dt:*

une quantité positive

<u>6.a</u>) méthode 1:

$$dW = -\vec{F}_L.\overrightarrow{dl}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= -\tfrac{B^2\ L^2 v(t)}{R}\vec{e}_x \\ \overrightarrow{dl} &= \overrightarrow{v}\,dt \end{aligned}$$

remplacons

$$\begin{aligned} dW &= -\vec{F}_L.\overrightarrow{dl} \\ &= -\vec{F}_L.\overrightarrow{v}\,dt \\ &= \tfrac{B^2\ L^2 v(t)}{R}\vec{e}_x.\overrightarrow{v}\,dt \\ &= \tfrac{B^2\ L^2 v^2(t)}{R}dt \qquad , \quad \vec{e}_x.\overrightarrow{v} = v(t) \end{aligned}$$

<u>6.b</u>) Méthode 2: *par le Théorème de Maxwell*

$$dW = I \times d\Phi = (-i_{ind}) \times d\Phi$$

avec (voir eqs 1.1)

$$\begin{aligned} d\Phi &= -Bv(t)\,Ldt \\ i_{ind} &= \tfrac{B\ Lv(t)}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dW &= -i_{ind}d\Phi \\ &= \tfrac{Bv(t)L}{R}.Bv(t)\,Ldt \quad \text{travail fourni par } \overrightarrow{B} \text{ au barreau.} \\ &= \tfrac{B^2\ L^2 v(t)}{R}dt > 0 \end{aligned}$$

<u>Exercice II</u>

<u>1.</u>a) *figure d'illustration:*

$$S = [ABCD] \in \text{plan } (O, \vec{u}, \vec{e}_z) \text{ de } R_s$$

la normale à la surface est dirigée dans la direction $\vec{v} = \vec{e}_\theta$. Noter qu'on a 2 référentiels

$$R_0 = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \text{ fixe,} \quad R_s = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z) \text{ mobile}$$
$$\vec{\omega}_{R_s/R_0} = \omega\vec{e}_z$$

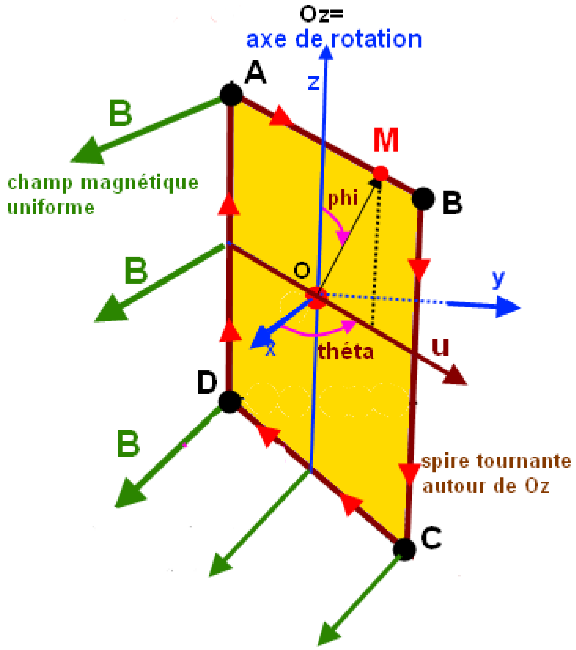


Figure 2: Spire ABCD de centre O tournante dans un champ $\vec{B} = B\vec{e}_x$. L'axe de rotation est $\overrightarrow{Oz}$.

<u>**1.b**</u>) La spire S est placé dans un champ magnétique *uniforme* $\vec{B} = B\vec{e}_x$; comme le cadre tourne, le flux Φ de B à travers la surface du cadre varie:

$$\begin{aligned} d\Phi(t) &= \vec{B}.d\vec{S} \\ &= BdS\ \vec{e}_x.\vec{v} \\ &= -BdS\sin\omega t \end{aligned}$$

<u>**2.a**</u>) coordonnées des points M de S. on a:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

repéré par

$$r = |\vec{r}| \quad , \quad \theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{e}_z}) \quad , \quad \phi = \left(\widehat{\vec{e}_z, \vec{r}}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} x &= r\sin\phi\cos\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\phi \end{aligned}$$

Ce sont les coordonnées spheriques.
La spire tourne par rapport à $\Delta = \overrightarrow{OZ}$ de R_0; et comme le cadre est *indéformable*, seule θ qui varie

$$\theta = \omega t$$

et

$$\begin{array}{lcl} r = cst & \Longrightarrow & \dot{r} = 0 \\ \phi = cst & \Longrightarrow & \dot{\phi} = 0 \end{array}$$

<u>2.b</u>) vitesse $\vec{v}\,(M/R_0)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) et ω

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}_{R_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}\,(M/R_0) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\phi\sin\theta \\ r\omega\sin\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{v}\,(M/R_0) = -\omega y\vec{e}_x + \omega x\vec{e}_y$$

<u>**3**</u>) L'origine du mouvement des charges libres q du cadre S est la *force magnétique*

$$\vec{F}_m = q\ \vec{E}_m$$

avec $\vec{E}_m$ le champ électromoteur.
<u>**4**</u>) Expression de $\vec{E}_m$ en fonction de w, B et les coordonnées de M,

$$\begin{array}{lcl} \vec{E}_m & = & \frac{\vec{F}_m}{q} \\ & = & \frac{q\vec{v}\wedge\vec{B}}{q} \quad = \vec{v}\wedge\vec{B} \\ & = & (-\omega y\vec{e}_x + \omega x\vec{e}_y)\wedge B_0\vec{e}_x \end{array}$$

donc

$$\vec{E}_m = -\omega x B_0\vec{e}_z$$

<u>**5**</u>) La f.e.m instantanée induite $e\,(t)$ dans la spire est:

$$\begin{array}{lcl} e\,(t) & = & \int_{ABCD}\vec{E}_m.\overrightarrow{dl} \\ & = & \int_{AB}\vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{BC}\vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{CD}\vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{DA}\vec{E}_m.\overrightarrow{dl} \end{array}$$

soit en remplacant

$$\vec{E}_m = -\omega x B_0\vec{e}_z \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{AB}\vec{E}_m.\overrightarrow{dl} = \int_{CD}\vec{E}_m.\overrightarrow{dl} \quad = 0$$

$$e\,(t) \quad = \quad \int_{BC}\vec{E}_m.\overrightarrow{dl} + \int_{DA}\vec{E}_m.\overrightarrow{dl}$$

$$\begin{array}{lcl} e\,(t) & = & \int_a^{-a}(-\omega x B_0)_{x=x_{BC}}\,dz + \int_{-a}^{a}(-\omega x B_0)\,dz \\ & = & 2a\omega B_0 x_{BC} - 2a\omega B_0 x_{DA} \end{array}$$

comme

$$\begin{array}{lclcl} x_{BC} & = & a\cos\theta & = & a\cos\omega t \\ x_{DA} & = & -a\cos\theta & = & -a\cos\omega t \end{array}$$

il en découle

$$e\,(t) = 4a^2\omega B_0\cos\omega t$$

6) Expression de la f.e.m par la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \vec{B}.\overrightarrow{ds} = B_0 \int_S \vec{e}_x.\overrightarrow{ds} \\ &= B_0\vec{e}_x.\overrightarrow{S} \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S} &= -4a^2\ \vec{u}\wedge\vec{e}_z \\ &= -4a^2\left(\vec{e}_x\cos\theta+\vec{e}_y\sin\theta\right)\wedge\vec{e}_z \\ &= -4a^2\left(-\vec{e}_y\cos\theta+\vec{e}_x\sin\theta\right) \end{aligned}$$

et par suite

$$\Phi = B_0\vec{e}_x.\overrightarrow{S} = -4a^2B_0\sin\omega t$$

et

$$\begin{aligned} e &= -\tfrac{d\Phi}{dt} \\ &= 4a^2\omega B_0\cos\omega t \end{aligned}$$

1.1 Exercice III: *Intéraction sélénoide-bobine*

1) schéma d'illustration: voir fig 3

a) commentaire

- $\mathbb{S}$: un sélénoide *semi-infini* d'axe $\overrightarrow{Oz}$ (avec $z_P \leq 0$)
  densité de spires au point z_P suivant z

$$n = \frac{d\mathcal{N}}{dz_P} \qquad \Rightarrow \qquad d\mathcal{N} = n dz_{_P}$$

- $\mathbb{B}$: une bobine d'axe $\overrightarrow{Oz}$ ayant N spires
- Rappel:
  champ $\tilde{\beta}$ crée par une spire de rayon a en M de son axe est:

$$\tilde{\beta} = \beta\ \vec{e}_z, \qquad \beta = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha$$

avec

$$\sin\alpha = \tfrac{a}{\sqrt{z^2+a^2}} \quad , \quad \cos\alpha = \tfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \quad , \quad \overrightarrow{PM} = \left| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{array} \right.$$

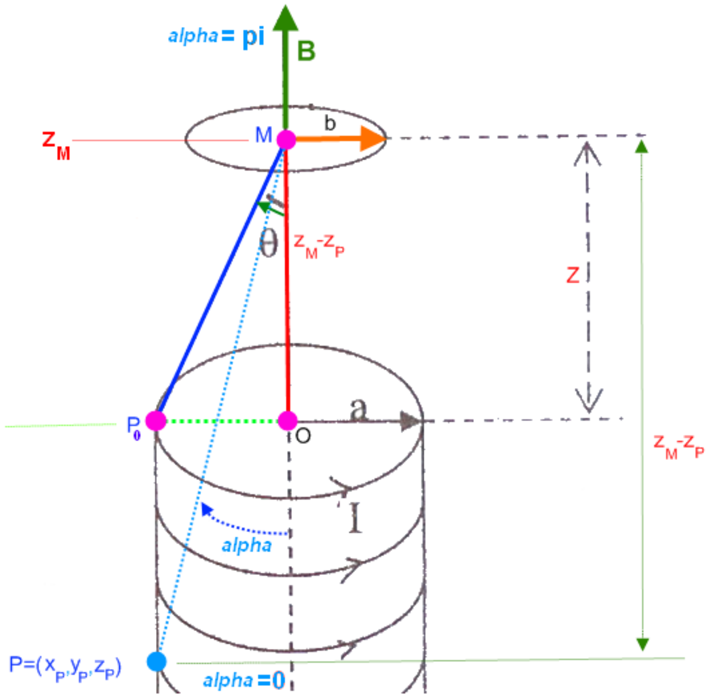


Figure 3: interaction magnétique entre un solénoide et une bobine

b) Remarques

- $qd\ z_{_P} \rightarrow -\infty$, nous avons les limites suivantes

$$\begin{array}{lll} z = z_M - z_P \rightarrow +\infty & \Longrightarrow \sin\alpha \rightarrow 0^+ & \Longrightarrow \alpha \rightarrow 0^+ \\ z = z_M - z_P \rightarrow 0 & \Longrightarrow \sin\alpha \rightarrow 1 & \Longrightarrow \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

d'où

$$-\infty \leq z_P \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \alpha \leq \theta$$

- pour $z_{_M}$ fixé, on a:

$$\begin{array}{lll} \tan\alpha & = & \frac{a}{z_M - z_P} \\ z_M - z_P & = & a\cot\alpha \\ dz_P & = & \frac{a}{\sin^2\alpha}d\alpha \quad , \text{ ici seule } z_P \text{ qui varie} \end{array}$$

<u>2</u>) Expression du champ $\vec{B}$ créé par $\mathbb{S}$ en un point de son axe:

$$\vec{B} = B\vec{e}_z, \qquad B = \int_{P\in \text{ Solénoide}} dB$$

avec

$$dB \quad = \beta d\mathcal{N} \quad = n\beta dz_{_P}$$

Remarque

$$\begin{array}{lcl} \text{1 spire crée} & : & \beta = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha \\ d\mathcal{N} \text{ spires créent} & : & dB = \beta d\mathcal{N} = n\beta dz_P \end{array}$$

remplaçons

$$\begin{aligned} dB &= \tfrac{\mu_0 nI}{2a}\sin^3\alpha dz_P &= \tfrac{\mu_0 nI}{2a}\sin^3\alpha \times \tfrac{a}{\sin^2\alpha}d\alpha \\ & &= \tfrac{\mu_0 nI}{2}\sin\alpha d\alpha \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{\mu_0 nI}{2}\int_0^\theta \sin\alpha d\alpha \\ &= \tfrac{\mu_0 nI}{2}(-\cos\alpha)_0^\theta \\ &= \tfrac{\mu_0 nI}{2}(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

<u>**Résultat**</u>

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \tfrac{\mu_0 nI}{2}(1-\cos\theta)\,\vec{e}_z \\ &\equiv B\vec{e}_z \end{aligned}$$

<u>**3**</u>) flux de $\vec{B}$ créé par $\mathbb{S}$ à travers une spire de la bobine $\mathbb{B}$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{spire}\vec{B}.d\vec{S} \\ &= \int_{spire}B\vec{e}_z.d\vec{S} \\ &= B\int_{spire}\vec{e}_z.d\vec{S} \quad , \quad \vec{B} \text{ supposé constant au voisinage de } \overrightarrow{Oz} \\ &= BS \end{aligned}$$

<u>**Résultat**</u>

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \ : \ \Phi_s = B\pi b^2 & = & \pi b^2\frac{\mu_0 nI}{2}(1-\cos\theta) & \text{une spire} \\ \text{b)} \ : \ \Phi_{Ns} = BN\pi b^2 & = & N\pi b^2\frac{\mu_0 nI}{2}(1-\cos\theta) & \text{bobine } \mathbb{B} \text{ de } N \text{ spires} \end{array}$$

<u>**4**</u>) inductance mutuelle M

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{\Phi}{I} \\ &= N\pi b^2\tfrac{\mu_0 n}{2}(1-\cos\theta) \\ &= M_0(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

<u>**5**</u>) déduire M_0

$$M_0 = \frac{\mu_0 nN}{2}\pi b^2$$

<u>**6.a**</u>) Déterminer la f.e.m induite en fonction de M_0, I, a, v et z

$$\begin{aligned} e &= -\tfrac{d\Phi}{dt} = -M_0 I\tfrac{d(1-\cos\theta)}{dt} \\ &= M_0 I\tfrac{d\cos\theta}{dt} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \tfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \\ \tfrac{d\cos\theta}{dt} &= \left(\tfrac{\left(1-\frac{z^2}{a^2+z^2}\right)}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\tfrac{dz}{dt} \\ &= \tfrac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\tfrac{dz}{dt} \end{aligned}$$

et

$$z = z_M - z_P \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dz & = d\left(z_M - z_P\right) \\ & = dz_M = -vdt \\ \frac{dz}{dt} & = -v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\cos\theta}{dt} = \frac{-a^2 v}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

<u>*Résultat*</u>

$$e \;=\; \frac{a^2 M_0 I}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dz}{dt} \;=-\frac{a^2 M_0 I v}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

<u>**6.b**</u>) courant induit dans la bobine

$$\begin{aligned} i &= \tfrac{e}{R} \\ &= \tfrac{-a^2 M_0 I v}{R(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

<u>**7**</u>) théorème de Maxwell

<u>**7.a**</u>) La résultante des forces magnétiques $\vec{F}$ qui s'exerce sur la bobine

$$dW \;=\; id\Phi \;=\; Fdz$$

$$\begin{aligned} F = \tfrac{dW}{dz} &= \tfrac{id\Phi}{dz} = \tfrac{id\Phi}{dt}\tfrac{1}{\frac{dz}{dt}} \\ &= -\tfrac{id\Phi}{dt}\tfrac{1}{v} = \tfrac{ie}{v} \\ &= \tfrac{e^2}{vR} \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{F} = \frac{M_0^2 I^2 a^4 v}{\left(a^2+z^2\right)^3 R}\vec{e}_z$$

<u>**7.b**</u>) La valeur de I pour laquelle la spire peut-elle être suspendue au dessus du solénoide

Cette condition est obtenue dans la limite $z \to 0$ on a

$$\vec{F} = F\vec{e}_z = \frac{M_0^2 I^2 v}{a^2 R}\vec{e}_z$$

la résultante des forces agissant sur la bobine est

$$\vec{F} + \vec{P} = (F - mg)\,\vec{e}_z$$

il y a lévitation du sélénoide si la force de Laplace est superieure au poids,

$$F > mg \quad \Longrightarrow \quad I > \tfrac{a}{M_0}\sqrt{\tfrac{mgR}{v}}$$

<u>**7.c**</u>) Cette équilibre est-il stable

l'equilibre est *instable* car quand $v \to 0$, la force $F \to 0$; et c'est le poids $m\vec{g}$ qui prend le dessus.

<u>**8**</u>) Puissance $\mathcal{P}$, dissipée par effet joules dans $\mathbb{B}$, en fonction de F et v

$$\begin{aligned} P &= Ri^2 = R\tfrac{e^2}{R^2} \\ &= \tfrac{e^2}{R} = Fv \end{aligned}$$

Exercice IV

schéma d'illustration, voir fig 4

On utilise les coordonnées (ρ, φ, z) et la formule

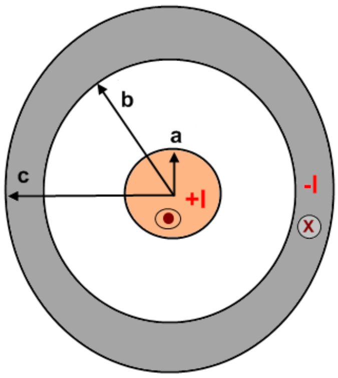


Figure 4: cable coaxial

$$\begin{aligned} W_m &= \iiint_{vol} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} d^3\tau \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \rho d\rho \right) \quad , \quad \text{dans notre cas} \\ &= 2\pi \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \rho d\rho \quad , \quad \Delta z = 1 \end{aligned}$$

Selon les valeurs de ρ, on distingue 4 régions:

a) région $\rho < a$

La symétrie implique $\vec{B} = B(\rho)\ \vec{e}_\varphi$; le théorème d'Ampère conduit à:

$$2\pi\rho B = \mu_0 i \quad \text{avec } i = I\frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} = I\frac{\rho^2}{a^2}$$

soit

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho\ \vec{e}_\varphi$$

L'énergie magnétique W_{m1} emmaganisée par unité de longueur $(\Delta z = 1)$ est

$$W_{m1} = 2\pi\Delta z \int_0^a \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

b) région $a < \rho < b$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\ \vec{e}_\varphi$$

d'où

$$W_{m1} = 2\pi\Delta z \int_0^a \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

c) <u>région $b < \rho < c$</u>
dans ce cas le courant est

$$i = I\left(1 - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$

d'où

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\,\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}\vec{e}_\varphi$$

L'énergie magnétique emmagasinée par unité de longueur est alors

$$W_{m3} = 2\pi\Delta z\int_0^a \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\rho d\rho = ...$$

d) <u>région $c < \rho$</u>

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\,(I - I)}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi = \vec{0}$$

$$W_{m4} = 0$$

<u>*Résultat*</u>

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} + W_{m4}$$